

Sobre l'estabilitat d'un sistema Sol-Júpiter-Saturn

Jordi-Lluís Figueras (Uppsala Universitet)
Alex Haro (Universitat de Barcelona, CRM)



Vuitena Jornada de Sistemes Dinàmics a Catalunya
Barcelona, 29 d'octubre de 2025

És estable el sistema Sol-Júpiter-Saturn?

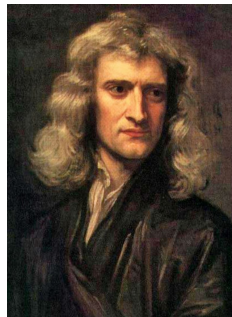
L'objectiu d'aquesta xerrada és convèncer el públic de *l'obvi*: en el sistema (pla) Sol-Júpiter-Saturn, la probabilitat que tots dos planetes girin al voltant de l'estrella indefinidament amb un moviment quasiperiòdic és positiva.

- 1 Introducció
- 2 El problema Sol-Júpiter-Saturn
- 3 A la recerca del tor perdut
- 4 Aplicant el teorema KAM
- 5 Observacions finals

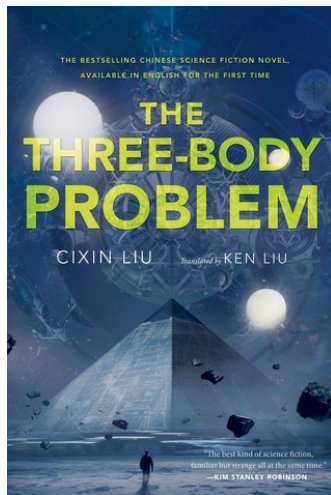
Introducció

Newton i l'origen del Problema dels Tres Cossos

Isaac Newton, als **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica** (1686), Llibre 3, després de considerar les dues primeres lleis de Kepler a la Proposició XIII, Teorema XIII (una aplicació de la seva Proposició XIV, Teorema VI, del Llibre 1), ja va discutir la necessitat d'ampliar l'estudi perquè no es podia menysprear l'acció de Júpiter sobre Saturn.



El Problema dels Tres Cossos havia estat formulat.



No aquest llibre

Aquesta qüestió i les seves relatives (com són les òrbites en general per al Problema dels Tres Cossos?) van ser la pastanaga que va fer avançar una part important de les Matemàtiques.

Grans noms com Lagrange, Laplace, Poincaré, Lindsted, i un llarg etcètera, van impulsar aquesta qüestió.

Hi havia dues visions aparentment excloents:

- L'estabilitat de les solucions, on els planetes orbiten al voltant del Sol amb un moviment quasiperiòdic *ad perpetuum*;
- L'existència de caos, on el moviment esdevé imprevisible.



KAM arriba per a resoldre el problema de l'estabilitat

Als voltants dels anys 60 del segle XX, una nova teoria va emergir per demostrar la persistència del moviment quasiperiòdic en Sistemes Hamiltonians, la teoria KAM, pels cognoms dels seus creadors: Kolmogorov, Arnold, Moser.

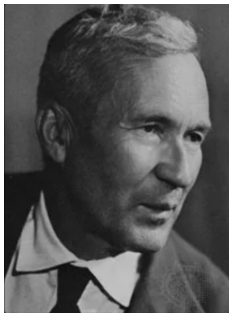
Formulació i resultat clau: per a una pertorbació prou petita d'un sistema integrable **no degenerat**, persisteix la **gran majoria** de **tors invariants** (que contenen moviment quasiperiòdics).

(Els tors amb freqüències **ressonants** es trenquen, creant caos.)

Metodologia: s'aprofita l'existència de coordenades d'acció-angle per al sistema no pertorbat, i s'utilitzen procediments de forma normal per simplificar el Hamiltonià i fer aparents els tors invariants.

Els herois!

K



A



M



Desafortunadament, o no, el problema planetari és **degenerat** (no compleix la condició KAM clàssica), però Arnold va provar la seva estabilitat en el cas d'un Sol i dos planetes movent-se sobre un pla.

Vam haver d'esperar a aquest segle per poder aplicar la Teoria KAM superant les degeneracions del problema planetari espacial, amb els treballs de Herman i Féjóz, i Chierchia i Pinzari.

Objeccions d'Hénon

Remarque sur ARNOLD .

On a (ARNOLD, 1963, Voy. mat. Nouv. n°7, p. 23/16) :

$$\delta(2) \leq e^{2n} (22n^2 + 100n)^{-2n} ;$$

$$\delta(17) \leq \delta(2) ;$$

et, p. 23/3 :

$$\delta_2 < \delta(17) ;$$

$$M = \delta_2^{8n+24}$$

D'où : $M < \left(\frac{e}{22n^2 + 100n} \right)^{2n(8n+24)}$

M est donc extrêmement petit : pour $n=2$, plus petite valeur intéressante, on a :

$$M < \left(\frac{e}{228} \right)^{160} < 10^{-320} !!$$

Dans le théorème n° 1 qui ne s'applique qu'à des systèmes à 2 corps, n° 2 est évidemment pas utilisable dans la pratique, du moins avec la forme présentée (cf. p. 12, § 1.5, 2°) : il faut en effet que la perturbation soit extrêmement petite.

Par exemple, la stabilité du système solaire n'est pas démontrée.

Ainsi, ces théorèmes, bien que d'un très grand intérêt théorique, ne semblent pas pouvoir en leur état actuel être appliqués à des problèmes pratiques, où les perturbations sont toujours beaucoup plus grandes . . .

– Michel Hénon, *Exploration numérique du problème restreint. IV. Masses égales, orbites non périodiques* (1966)

Jacques Laskar, *Michel Hénon and the Stability of the Solar System* (2014)

Així, aplicar directament el teorema KAM per a problemes realistes condueix a resultats molt pessimistes.

Una opció per obtenir cotes realistes és mitjançant *Computer Assisted Proofs* (CAPs) en models simplificats per validar els càlculs clàssics de forma normal. (En particular, es consideren models restringits, models seculars, o models truncats on les expansions s'han tallat).

Hi ha hagut avenços molt importants en l'aplicació d'aquestes tècniques a problemes planetaris (Celletti, Chierchia, Giorgilli, Robutel, Locatelli, Sansottera, Caracciolo, Danesi, ...).

Però les mides de les pertorbacions són encara molt pessimistes pel problema de tres cossos, pla, sense simplificar, obtenint masses de l'ordre 10^{-85} masses solars i posant a *Saturn* a 5.2×10^{12} UA (Castan, 2017).

Una nova esperança: el mètode de parametrització

Un canvi de paradigma va ser el *Mètode de Parametrització* (MP) [Cabré, Fontich, de la Llave 2003a, 2003b, 2005], que en KAM era la teoria KAM sense coordenades angle-acció [de la Llave 1999; de la Llave, González, Jorba, Villanueva 2005].

En lloc de fer canvis de coordenades a l'espai de fase, el MP consisteix a fer correccions a les parametritzacions dels objectes cercats en qüestió, i en provar resultats de convergència.

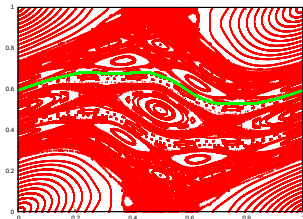
Els mètodes es poden traduir en algorismes de còmput, i els teoremes permeten validar els resultats.

Aquest programa es va completar per a tors invariants hiperbòlics (i les seves varietats invariants) en sistemes quasiperiòdics, des de resultats teòrics, algorismes i implementacions [Haro, de la Llave 2006a, 2006b, 2007], fins a arribar a CAPs [Figueras, Haro 2012; Haro, Sandín 2024].

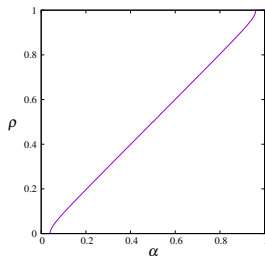
CAP KAM SENSE CAP!

El MP, amb combinació amb CAPs, ha tingut èxit en problemes KAM, lluny de ser integrables:

- Existència de tors invariants en aplicacions simplèctiques, com les aplicacions estàndard, estàndard *non-twist*, i de Froeschlé [Figueras, Haro, Luque 2017];
- Cotes inferiors (i superiors) rigoroses de la mesura m del conjunt de paràmetres en què l'aplicació estàndard del cercle és conjugada a una rotació [Figueras, Haro, Luque 2020].



$$\varepsilon = 0.97$$



$$\varepsilon = 0.25, 0.860748 < m < 0.914161.$$

El problema Sol-Júpiter-Saturn

El projecte SJS

Objectiu: Demostrar l'existència de moviment quasiperiòdic en el sistema pla Sol-Júpiter-Saturn (per a les dades observades).

Aquest és un projecte a llarg termini, que vam començar amb l'Alejandro Luque.

El projecte inclou:

- **teoremes KAM** a posteriori [Figueras, Haro 23];
- **mètodes numèrics** basats en tors traslladats [González, Haro, de la Llave 13, 22, Figueras, Haro 25];
- estratègies de **validació amb FFT** [Figueras, Haro, Luque 17].

Dificultats addicionals: dimensió, consideració de tot el Hamiltonià, proximitat a degeneració ...

Explicarem aquí els mètodes numèrics, i els resultats. Falta realitzar la CAP.

Les equacions en coordenades de Delaunay

El Hamiltonià del problema pla d' $(1 + n)$ cossos, en coordenades de Delaunay (ℓ, g, L, G) , $H_D : \mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, és de la forma

$$H_D(\ell, g, L, G) = \sum_{i=1}^n \frac{-m_i^3}{2L_i^2} + \mu H_D^1(\ell, g, L, G),$$

on:

- les unitats de massa, distància i temps s'escullen de forma que la massa del Sol és 1 i el període d'una òrbita circular de radi 1 és 2π (de forma que la constant de gravitació universal és 1);
- les masses planetàries són μm_i , on μ és *petita*.

Notem la famosa degeneració en el problema d' $(1 + n)$ cossos: la part integrable només depèn de les accions L i no de les accions G !

Reducció pel moment angular total

Fixant el moment angular total, $\hat{G}_n$, que és una integral primera, obtenim el Hamiltonià reduït $H_{\hat{G}_n} : \mathbb{T}^{2n-1} \times \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ donat per

$$H_{\hat{G}_n}(\ell, \hat{g}, L, \hat{G}) = \sum_{i=1}^n \frac{-m_i^3}{2L_i^2} + \mu H_{\hat{G}_n}^1(\ell, \hat{g}, L, \hat{G}),$$

amb $\hat{g} = (\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{n-1})$ i $\hat{G} = (\hat{G}_1, \dots, \hat{G}_{n-1})$, on

$$\hat{G}_s := \sum_{1 \leq k \leq s} G_k,$$

i $\hat{g}_s$ és el conjugat simplèctic de $\hat{G}_s$.

Avaluar $H_{\hat{G}_n}$ no és *difícil*: passar de coordenades de Delaunay a cartesianes requereix resoldre una equació fàcil (l'equació de Kepler), compondre, i la reducció de $\hat{G}_n$ és explícita. A més, obtenir-ne les derivades parcials també és fàcil: podem fer-ho a mà si l'ordre és petit, o utilitzar la diferenciació automàtica.

Dades per al sistema Sol-Júpiter-Saturn

En el nostre cas, $n = 2$, i les masses relatives de Júpiter i Saturn són $0.9546 \cdot 10^{-3}$ i $0.2856 \cdot 10^{-3}$, de manera que $m_1 = 0.9546$, $m_2 = 0.2856$, i $\mu = 10^{-3}$.

De la tercera llei de Kepler obtenim que les freqüències ràpides són

$$\omega^\ell = (8.39549288702546301204 \cdot 10^{-2}, 3.38240117059304358259 \cdot 10^{-2}).$$

La tercera freqüència, lenta, corresponent a la precessió relativa, s'obté per anàlisi de freqüències [Locatelli, Giorgilli 2007]:

$$\omega^{\hat{g}^1} = -1.85007988077595000000 \cdot 10^{-5}.$$

Aquestes freqüències són gairebé Diofantines: per $\omega = (\omega^\ell, \omega^{\hat{g}^1})$, $\gamma = 1.69 \cdot 10^{-6}$ i $\tau = 2.4$, existeixen $\tilde{\omega}$ que satisfan $|\tilde{\omega} - \omega| < 10^{-80}$, i per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$, $|k \cdot \tilde{\omega}| \geq \frac{\gamma}{|k|_1^\tau}$.

- 1 Obtenir una bona aproximació d'una parametrització $K: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ que sigui (numèricament) invariant, que satisfaci l'equació d'invariància ¹

$$\mathcal{L}_\omega K(\theta) + X_{H_{\hat{G}_2}}(K(\theta)) = 0, \quad (1)$$

on $\mathcal{L}_\omega K(\theta) = -DK(\theta) \cdot \omega$ i $X_{H_{\hat{G}_2}} = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix} (DH_{\hat{G}_2})^\top$.

- 2 Comprovar que el Hamiltonià i l'aproximació donada del tor compleix les hipòtesis d'un teorema KAM quantitatiu, amb format *a posteriori*. ².

¹També, $X_{H_{\hat{G}_n}}(K(\theta)) = DK(\theta)\omega$.

²Figueras, Haro, *A modified parameterization method for invariant lagrangian tori for partially integrable Hamiltonian systems* (2023)

A la recerca del tor perdut

A computation is a temptation that should be resisted as long as possible.

– John P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods* (2000)

El sistema

$$H_{\hat{G}_2}(\ell, \hat{g}, L, \hat{G}) = \sum_{i=1}^2 \frac{-m_i^3}{2L_i^2} + \mu H_{\hat{G}_2}^1(\ell, \hat{g}, L, \hat{G}),$$

pateix un inconvenient: per a $\mu = 0$ li manca una acció ($\hat{G}$).

Les implicacions:

- per a $\mu = 0$ els tors invariants 3D estan foliats per tors invariants 2D, la tercera freqüència és 0, i qualsevol $\hat{G}$ funciona.
- no podem continuar un tor amb freqüència ω des de $\mu = 0$, perquè no existeix!

El mètode de tors traslladats

El mètode consisteix a afegir un contra-terme que permeti desingularitzar el problema (Herman).

Seguint [González, Haro, de la Llave 2014], introduïm un paràmetre extra λ , afegint una equació, i resollem

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_\omega K(\theta) + X_{H_{\hat{G}_n}^0}(K(\theta)) + \mu X_{H_{\hat{G}_n}^1}(K(\theta)) + X_{\hat{G}}(K(\theta))\lambda = 0, \\ \langle \Pi_{\hat{G} \circ K} \rangle - \hat{G}_0 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

per al parell (K, λ) fent homotopia des de $\mu = 0$ fins a $\mu = 10^{-3}$.

Si escollim correctament $\hat{G}_0$, obtenim que per al paràmetre $\mu = 10^{-3}$ la translació λ és zero. Resolem, doncs,

$$\lambda(\hat{G}_0, \mu) = 0.$$

Obtenim $\hat{G}_0 = 2.17647359010273488684$.

Un pas de Newton per a tors traslladats: plantejament

Donada una solució aproximada $(K(\theta), \lambda)$ de (2), realitzem una correcció de la forma $(P(\theta)\xi(\theta), \Delta\lambda)$, on $P(\theta) = \begin{pmatrix} DK(\theta) & N(\theta) \end{pmatrix}$ és aproximadament simplèctica.

S'obté el sistema lineal (en el qual $T(\theta)$ és la torsió):

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_\omega \xi^{DK}(\theta) + T(\theta) \xi^N(\theta) + b^{DK}(\theta) \Delta\lambda = \eta^{DK}(\theta), \\ \mathfrak{L}_\omega \xi^N(\theta) + b^N(\theta) \Delta\lambda = \eta^N(\theta), \\ \langle \Pi_{\hat{G}}(DK(\theta) \xi^{DK}(\theta) + N(\theta) \xi^N(\theta)) \rangle = -\langle \Pi_{\hat{G}} \circ K \rangle + \hat{G}_0, \end{cases}$$

on

$$\begin{pmatrix} b^{DK}(\theta) \\ b^N(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(\theta)^\top \\ -DK(\theta)^\top \end{pmatrix} \Omega X_{\hat{G}}(K(\theta)),$$

$$\begin{pmatrix} \eta^{DK}(\theta) \\ \eta^N(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N(\theta)^\top \\ DK(\theta)^\top \end{pmatrix} \Omega (\mathfrak{L}_\omega K(\theta) + X_H(K(\theta)) + \lambda X_{\hat{G}}(K(\theta))).$$

Interludi: l'equació de petits divisors

Sigui $\omega \in \mathbb{R}^m$ prou no-ressonant (condició diofàntica).

Donat $\eta : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ prou regular, existeix una única $\xi : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de mitjana zero tal que

$$\mathcal{L}_\omega \xi = \eta - \langle \eta \rangle,$$

on $\langle \eta \rangle$ denota la mitjana de η . Escrivem, $\xi = \mathfrak{R}_\omega \eta$.

En Fourier, si

$$\eta(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\eta}_k e^{ik \cdot \theta}$$

llavors

$$\xi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \frac{\hat{\eta}_k}{-ik \cdot \omega} e^{ik \cdot \theta}.$$

Un pas de Newton per a tors traslladats: solució

La mitjana $\xi_0^N = \langle \xi^N \rangle$ i $\Delta\lambda$ satisfan el sistema lineal

$$\langle \hat{T} \rangle \begin{pmatrix} \xi_0^N \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\eta}^{\text{DK}} \rangle \\ -\langle \Pi_{\hat{G}} \circ K \rangle + \hat{G}_0 - \langle \Pi_{\hat{G}} \text{DK} \mathfrak{R}_\omega \tilde{\eta}^{\text{DK}} \rangle \end{pmatrix},$$

on $\hat{T}$ és la supertorsió, que suposem de mitjana regular,

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T & \tilde{b}^{\text{DK}} \\ \Pi_{\hat{G}}(N - \text{DK} \mathfrak{R}_\omega T) & -\Pi_{\hat{G}}(\text{DK} \mathfrak{R}_\omega \tilde{b}^{\text{DK}} + N \mathfrak{R}_\omega b^N) \end{pmatrix}$$

amb $\tilde{b}^{\text{DK}} = b^{\text{DK}} - T \mathfrak{R}_\omega b^N$ i $\tilde{\eta}^{\text{DK}} = \eta^{\text{DK}} - T \mathfrak{R}_\omega \eta^N$. Llavors

$$\begin{cases} \xi^N(\theta) = \xi_0^N + \mathfrak{R}_\omega \eta^N(\theta) - \mathfrak{R}_\omega b^N(\theta) \Delta\lambda, \\ \xi^L(\theta) = \mathfrak{R}_\omega \tilde{\eta}^{\text{DK}}(\theta) - \mathfrak{R}_\omega T(\theta) \xi_0^N - \mathfrak{R}_\omega \tilde{b}^{\text{DK}}(\theta) \Delta\lambda, \end{cases}$$

d'on obtenim la nova aproximació $(K + P\xi, \lambda + \Delta\lambda)$.

En particular, per a $\mu = 0$, el tor traslladat és

$$K_{\hat{G}_0}(\theta^\ell, \theta^{\hat{g}}) = (\theta^\ell, \theta^{\hat{g}}, L_0, \hat{G}_0) \quad (3)$$

on les components de L_0 són determinades per la tercera llei de Kepler, i λ és igual a la freqüència secular $\omega^{\hat{g}}$.

A més, la seva torsió i supertorsió són:

$$\langle T \rangle = \begin{pmatrix} D^2 H^0(L_0) & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \langle \hat{T} \rangle = \begin{pmatrix} D^2 H^0(L_0) & O & O \\ O & O & I \\ O & I & O \end{pmatrix},$$

respectivament.

Així, tot i que la torsió és degenerada, la supertorsió no ho és, i això permet començar la continuació de tors traslladats des de $\mu = 0$.

Un pas de Newton per a tors invariants

Aleshores, donada una solució aproximada K de (1), la seva correcció ve donada per $P(\theta)\xi(\theta)$, on $\xi(\theta)$ satisfà el sistema lineal

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_\omega \xi^{\text{DK}}(\theta) + T(\theta)\xi^N(\theta) = \eta^{\text{DK}}(\theta), \\ \mathfrak{L}_\omega \xi^N(\theta) + = \eta^N(\theta), \end{cases}$$

$$\text{on } \begin{pmatrix} \eta^{\text{DK}}(\theta) \\ \eta^N(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N(\theta)^\top \\ \text{DK}(\theta)^\top \end{pmatrix} \Omega(\mathfrak{L}_\omega K(\theta) + X_H(K(\theta))).$$

Suposant que la torsió $\langle T \rangle$ és no degenerada, el sistema es pot resoldre:

$$\begin{cases} \xi_0^N = \langle T(\theta) \rangle^{-1} \langle \eta^{\text{DK}}(\theta) - T(\theta)\mathfrak{R}_\omega \eta^N(\theta) \rangle, \\ \xi^N(\theta) = \xi_0^N + \mathfrak{R}_\omega \eta^N(\theta), \\ \xi^{\text{DK}}(\theta) = \mathfrak{R}_\omega \left(\eta^{\text{DK}}(\theta) - T(\theta)\xi^N(\theta) \right). \end{cases}$$

Projeccions del tor en coordenades de Delaunay

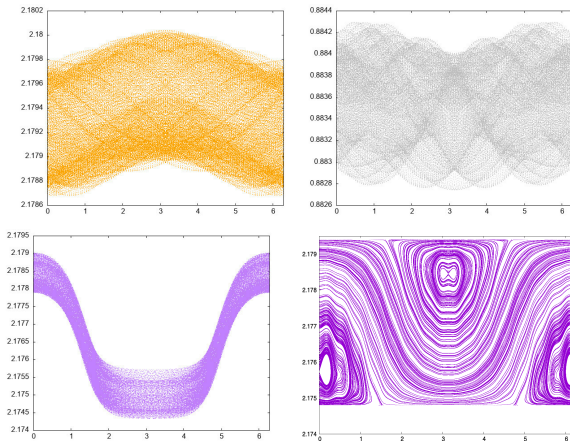


Figura: Projeccions del tor invariant 3D en coordenades de Delaunay sobre les parelles (ℓ_1, L_1) , (ℓ_2, L_2) i $(\hat{g}, \hat{G})$, i retrat de fase del Hamiltonià secular.

Proyecciones del tor en coordenadas cartesianas

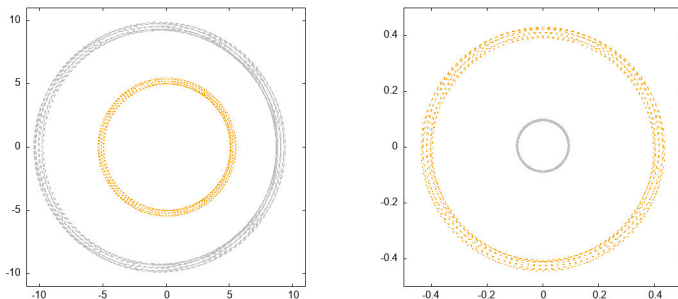
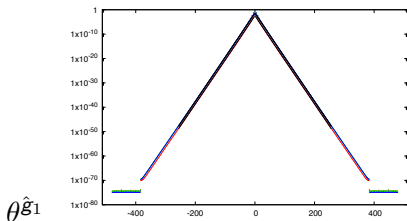
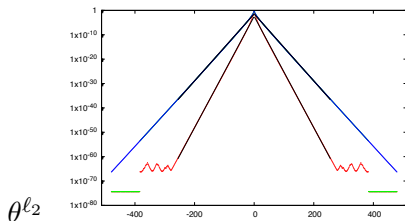
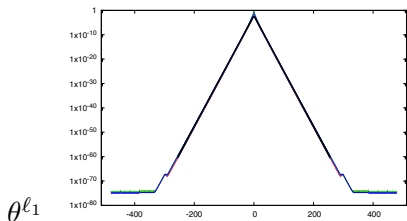


Figura: Proyecciones del tor invariante 3D en coordenadas cartesianas sobre posiciones $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2})$, $x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2})$ i moments $y_1 = (y_{1,1}, y_{1,2})$, $y_2 = (y_{2,1}, y_{2,2})$ de Júpiter (taronja) i Saturn (gris), respectivament.

Coeficients de Fourier i bandes d'analiticitat



	$K^{\ell_1} + iK^{L_1}$	$K^{\ell_2} + iK^{L_2}$	$K^{\hat{g}_1} + iK^{\hat{G}_1}$
ρ_{ℓ_1}	0.524453	0.521794	0.522239
ρ_{ℓ_2}	0.416514	0.417078	0.417001
$\rho_{\hat{g}_1}$	0.525773	0.316526	0.316557

Ajustos dels coeficients de Fourier de les components (complexificades) de la parametrització, i estimacions de bandes d'analiticitat per angles.

Aplicant el teorema KAM

Hipòtesis del teorema KAM

Sigui $K : \bar{\mathbb{T}}_\rho^m \rightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^m \times \mathbb{C}^m$ una aplicació contínua, real-analítica a $\mathbb{T}_\rho^m$, amb derivades contínues a $\bar{\mathbb{T}}_\rho^m$, amb $K(\theta) - (\theta, 0)$ 2π -periòdica.

Sigui $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ un Hamiltonià real-analític, definit en

$$\mathcal{U} = \{(\theta, I) \in \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^m \times \mathbb{C}^m \mid \exists \theta_0 \in \bar{\mathbb{T}}_\rho^m, |(\theta, I) - K(\theta_0)| < R\}.$$

Sigui ω un vector diofàntic amb constants $\gamma > 0$ i $\tau \geq m - 1$.

També assumim:

H_1 Existeixen constants c_{X_h} , c_{DX_h} , $c_{(DX_h)^\top}$, $c_{D^2X_h}$ tals que

$$|X_h|_{\mathcal{U}} \leq c_{X_h}, \quad |DX_h|_{\mathcal{U}} \leq c_{DX_h}, \quad |(DX_h)^\top|_{\mathcal{U}} \leq c_{(DX_h)^\top}, \quad |D^2X_h|_{\mathcal{U}} \leq c_{D^2X_h}.$$

H_2 Hi ha *nombres de condició* σ_{DK} , $\sigma_{(DK)^\top}$, σ_B , i $\sigma_{\langle T \rangle^{-1}}$ tals que

$$|DK|_\rho < \sigma_{DK}, \quad |(DK)^\top|_\rho < \sigma_{(DK)^\top}, \quad |B|_\rho < \sigma_B, \quad |\langle T \rangle^{-1}| < \sigma_{\langle T \rangle^{-1}},$$

on

$$B = (DK^\top DK)^{-1}, \quad N = J DK B, \quad T = N^\top \Omega (DX_h \circ K + J DX_h \circ K J) N$$

Tesis del teorema KAM

Per a cada $\delta \in]0, \rho/6[$, existeixen constants $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_{\Delta K}$ que depenen de ρ, δ i de les constants i objectes anteriors, tals que, si

$$\frac{\mathfrak{C}}{\gamma\delta^{\tau+1}} \max \left\{ |\eta^{\text{DK}}|_{\rho}, \frac{1}{\gamma\delta^{\tau}} |\eta^N|_{\rho} \right\} < 1, \quad (4)$$

on

$$\eta^{\text{DK}} = -N^{\top} \Omega (\mathfrak{L}_{\omega} K + X_h \circ K), \quad \eta^N = (\text{DK})^{\top} \Omega (\mathfrak{L}_{\omega} K + X_h \circ K),$$

aleshores, per a $\rho_{\infty} = \rho - 6\delta$, existeix $K_{\infty} : \bar{\mathbb{T}}_{\rho_{\infty}}^m \rightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^m \times \mathbb{C}^m$ contínua, real-analítica a $\mathbb{T}_{\rho_{\infty}}^m$, amb derivades contínues a $\bar{\mathbb{T}}_{\rho_{\infty}}^m$, amb $K_{\infty}(\theta) - (\theta, 0)$ 2π -periòdica, que és invariant sota X_h , amb freqüència ω , de manera que

$$\mathfrak{L}_{\omega} K_{\infty} + X_h \circ K_{\infty} = 0.$$

A més, K_{∞} satisfà la hipòtesi H_2 , a $\mathbb{T}_{\rho_{\infty}}^m$, i és a prop de K :

$$|K_{\infty} - K|_{\rho_{\infty}} \leq \frac{\mathfrak{C}_{\Delta K}}{\gamma\delta^{\tau}} \max \left\{ |\eta^{\text{DK}}|_{\rho}, \frac{1}{\gamma\delta^{\tau}} |\eta^N|_{\rho} \right\}. \quad (5)$$

[Villanueva 17],[Figueras, Haro 23]

Com utilitzar el Teorema

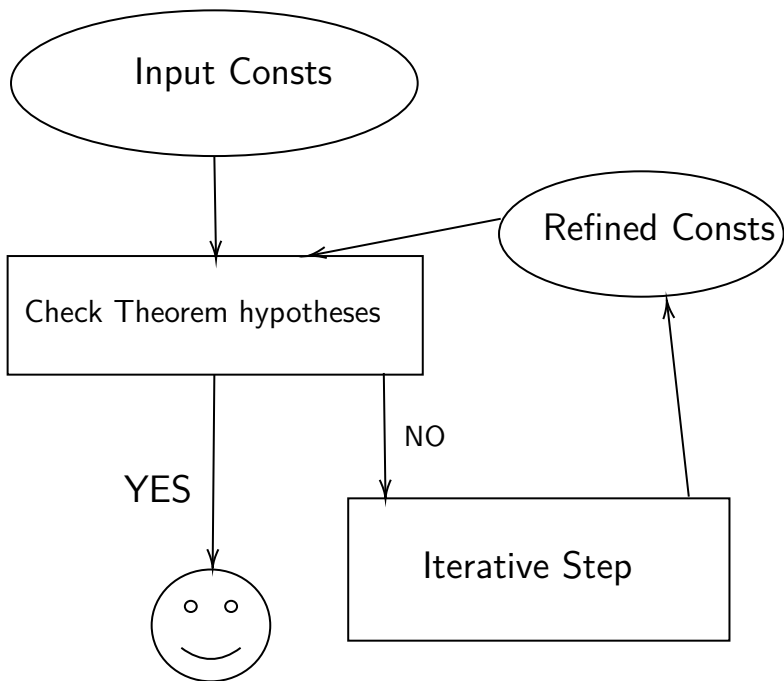
Comencem amb una aproximació a la nostra solució, a partir de la qual, ajustant ρ , obtenim les constants d'entrada:

- Fites superiors en un entorn (complex) de l'aproximació del camp vectorial i les seves derivades;
- Fites superiors de les derivades de la parametrització del tor i de la inversa de la seva mètrica;
- Fites superiors de la torsió de la parametrització i de la inversa de la seva mitjana;
- Fites superiors dels errors d'invariància.

Aleshores, combinem el Teorema i un Lema Iteratiu.

En el nostre problema: obtenim que perquè el teorema garanteixi l'existència del tor, aquest necessita tenir un error d'invariància més petit que 10^{-47} .

Hem obtingut un error 10^{-54} !!!.



Obstacles durant la computació

Hem patit bastants obstacles, teòrics i computacionals.

En l'última etapa, vam requerir un ordinador amb 256 GB de RAM i 2 TB de memòria de disc, i escriure la codificació per a tenir només una funció periòdica (ja sigui en la seva representació en el domini espacial o freqüencial) a la memòria RAM, paral·lelització amb 8 nuclis, adaptant els algorismes per a la FFT, etc. Un pas del mètode de Newton triga al voltant de 6 dies.

També hem utilitzat Uppmax, el superordinador d'Uppsala, que té 16 nuclis per node. Un pas del mètode de Newton triga al voltant de 10 dies.

Al nou superordinador de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la UB, un pas triga menys d'un dia i mig!

Falta completar la computer assisted proof.

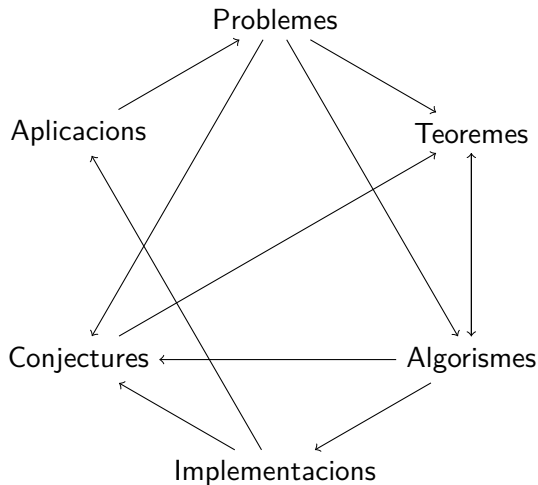
The standard of correctness and completeness necessary to get a computer program to work at all is a couple of orders of magnitude higher than the mathematical community's standard of valid proofs.

– William P. Thurston, *On proof and progress in Mathematics* (1994)

Observacions finals

- El MP i la seva formulació *a posteriori* permeten derivar algoritmes de càlcul molt eficients, i els seus resultats es poden validar amb els teoremes corresponents.
- En el context del problema planetari, a part del problema d'1+2 cossos (Sol-Júpiter-Saturn), ens agradaria estudiar també d'altres. Hi ha molts sistemes planetaris allà fora... molts d'ells no són plans.
- Motivats per problemes de mecànica celeste i astrodinàmica, estem desenvolupant aquestes tècniques, amb aplicacions potencials també en altres àmbits, tot col·laborant amb

Josep Maria Mondelo, Álvaro Fernández-Mora, Miquel Barcelona, Renato Calleja, Pedro Porras, Jordi-Lluís Figueras, Chiara Caracciollo ...



La nostra motivació i inspiració sorgeix de manera natural dins del si dels Sistemes Dinàmics a Catalunya:

- la mecànica celeste i l'astrodinàmica són uns dels motors de la recerca des dels seus orígens, amb en **Carles Simó**;
- al desenvolupament de la metodologia del mètode de la parametrització han participat també molts investigadors, amb en **Rafael de la Llave** com a nexa comú.

Gràcies!